

И. В. Бойков, В. А. Рязанцев

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Уравнения в частных производных гиперболического типа занимают одно из центральных мест в задачах математического моделирования различных процессов и явлений физики и техники. В частности, гиперболические уравнения широко применяются в таких областях, как акустика, теория упругости, аэро- и электродинамика. В настоящее время теория обратных и некорректных задач для уравнений математической физики, интенсивно развиваясь, находит все более широкое применение в самых различных прикладных областях. Вместе с тем имеется большая практическая потребность в дальнейшей разработке точных и устойчивых численных методов, позволяющих эффективно решать различные типы обратных задач. Целью данной работы является построение упомянутых методов решения одного класса коэффициентных обратных задач для простейших гиперболических уравнений, а именно волновых уравнений.

Материалы и методы. Построение алгоритмов решения обратных начальных и граничных коэффициентных задач для одно- и двухмерного волнового уравнения основывается на применении непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах. Важной особенностью этого метода является то, что его реализация не предполагает построения обратного оператора. В основе метода лежит замена исходного нелинейного операторного уравнения на дифференциальное уравнение специального вида и его последующее приближенное решение с использованием методов теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты. Исследована проблема численного решения обратных коэффициентных задач для одно- и двухмерного волнового уравнения. Рассмотрена как задача Коши, так и начально-краевая задача для волнового уравнения. В результате предложены алгоритмы численного решения указанных задач. Решение модельных примеров продемонстрировало эффективность предложенных алгоритмов.

Выводы. На основе непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений разработаны отличающиеся простотой и эффективностью алгоритмы численного решения обратных коэффициентных задач для волнового уравнения.

Ключевые слова: волновое уравнение, обратные коэффициентные задачи, непрерывный операторный метод, логарифмическая норма.

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

© Бойков И. В., Рязанцев В. А., 2019. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Abstract.

Background. Partial differential equations of hyperbolic type hold a prominent place in mathematical modeling of different processes and phenomena in physical and technical sciences. In particular, hyperbolic equations are widely used in such areas as acoustics, elasticity theory, aerodynamics and electrodynamics. At present time the theory of inverse and incorrect problems for partial differential equations is intensively developing and finds expanding applications in wide variety of application areas. In addition to that, there are important needs in further devising of precise and stable methods which allow us to solve different types of inverse problems. The goal of this paper is constructing of the mentioned methods for solution of one class of inverse coefficient problems for the simplest hyperbolic equations such as wave equation.

Materials and methods. Construction of algorithms for solution of inverse initial and boundary coefficient problems for one- and two-dimensional wave equation is based on application of continuous method for solution of nonlinear operator equations in Banach spaces. The important feature of this method is that its implementation do not require construction of inverse operator. At the method's core is substitution of the original nonlinear operator equation for the differential equation of special type and its subsequent approximate solution using methods of stability theory for systems of ordinary differential equations.

Results. A problem of numerical solution of inverse coefficient problems for one- and two-dimensional wave equations is studied in the paper. Both initial and boundary value problems for wave equation are considered. As a result algorithms for numerical solution of the mentioned problem are proposed. Solving of several model problems demonstrates the effectiveness of the proposed algorithms.

Conclusions. On the base of continuous method for solution of nonlinear operator equation simple and effective algorithms for numerical solution of inverse coefficient problems for wave equation are proposed.

Keywords: wave equation, inverse coefficient problems, continuous operator method, logarithmic norm.

Введение

Коэффициентная обратная задача для уравнений гиперболического типа исследовалась ранее многими авторами [1–4]. Отметим, что важной особенностью этого класса задач является их некорректность, заключающаяся в том, что малые возмущения начальных данных вызывают значительные изменения в решении. Эта особенность обуславливает значительные сложности при разработке численных методов решения таких задач и вызывает потребность в применении устойчивых регуляризующих алгоритмов.

В настоящей статье развивается подход к определению неизвестного коэффициента, основанный на составлении параметрического дифференциального уравнения специального вида. Это уравнение затем решается при помощи одного из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Помимо того, что предлагаемый метод отличается простотой и устойчивостью, важнейшим его достоинством является универсальность в том смысле, что подход, служащий основой метода, может быть успешно распространен на другие классы обратных задач для уравнений математической физики. Так, в статье [5] этот подход был успешно применен для решения задачи восстановления постоянного коэффициента в одно- и

двухмерном уравнениях теплопроводности. Таким образом, данную статью можно рассматривать как дальнейшее развитие упомянутого подхода.

В данной работе рассматриваются проблемы приближенного восстановления постоянного коэффициента χ в следующих задачах.

1. Задача Коши для одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x). \quad (2)$$

2. Задача Коши для двухмерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \chi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad (3)$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x, y). \quad (4)$$

3. Граничная задача для одномерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (5)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x), \quad (6)$$

$$u(t, 0) = \varphi^{(1)}(t), \quad u(t, \ell) = \varphi^{(2)}(t). \quad (7)$$

4. Граничная задача для двухмерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \chi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (x, y) \in [0, \ell]^2, \quad (8)$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x, y), \quad (9)$$

$$u(t, x, 0) = \varphi^{(1)}(t, x), \quad u(t, x, \ell) = \varphi^{(2)}(t, x),$$

$$u(t, 0, y) = \varphi^{(3)}(t, y), \quad u(t, \ell, y) = \varphi^{(4)}(t, y). \quad (10)$$

При решении задачи восстановления коэффициента χ используется следующая дополнительная информация:

– в случае, если рассматривается одномерная задача (1)–(2) или (5)–(7), предполагается известным значение $u(t^*, x^*)$ решения соответствующей задачи в фиксированной точке (t^*, x^*) , принадлежащей области определения задачи.

– в случае, если рассматривается двухмерная задача (3)–(4) или (8)–(10), предполагается известным значение $u(t^*, x^*, y^*)$ решения соответствующей задачи в фиксированной точке (t^*, x^*, y^*) , принадлежащей области определения задачи.

1. Описание непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений

Следуя работе [6], приведем описание непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений, лежащего в основе конструируемых в настоящей статье алгоритмов.

Рассматривается операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad x \in X, \quad (11)$$

где $A: X \rightarrow X$ – нелинейный оператор; X – банахово пространство.

Уравнению (11) ставится в соответствие следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f. \quad (12)$$

К уравнению присоединяется начальное условие

$$x(t_0) = x_0. \quad (13)$$

В работе [6] формулируются и доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть уравнение (11) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в банаховом пространстве B , справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \quad (14)$$

Тогда решение задачи Коши (12)–(13) сходится при t , стремящемся к бесконечности, к решению x^* уравнения (11) при любом начальном приближении.

Теорема 2. Пусть уравнение (11) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $R(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

- при любом t ($t > 0$) выполняется равенство $\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0$;
- справедливо неравенство (14).

Тогда решение задачи Коши (12), (13) сходится при t , стремящемся к бесконечности, к решению уравнения (11).

Здесь через $\Lambda(K)$ обозначена логарифмическая норма линейного оператора K .

Указанные теоремы служат теоретической основой для построения численных методов, описанных в следующих разделах.

2. Восстановление неизвестного коэффициента в задаче Коши для волнового уравнения

Поставим задачу о восстановлении неизвестного коэффициента χ в задаче (1)–(2) в предположении о том, что дополнительно известным является значение $u(t^*, x^*)$ решения задачи (1)–(2) в фиксированной точке $(t^*, x^*) \in (0, T) \times \mathbb{R}$.

Известно [7], что общее решение задачи Коши (1)–(2) определяется следующей формулой (формулой Даламбера):

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [u_0(x + \sqrt{\chi}t) + u_0(x - \sqrt{\chi}t)] + \frac{1}{2\sqrt{\chi}} \int_{x-\sqrt{\chi}t}^{x+\sqrt{\chi}t} v_0(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Зафиксируем в этой формуле $t = t^*$, $x = x^*$, после чего перепишем формулу (15) в виде уравнения с нулевой правой частью:

$$\frac{1}{2} [u_0(x^* + \sqrt{\chi}t^*) + u_0(x^* - \sqrt{\chi}t^*)] + \frac{1}{2\sqrt{\chi}} \int_{x^* - \sqrt{\chi}t^*}^{x^* + \sqrt{\chi}t^*} v_0(\xi) d\xi - u(t^*, x^*) = 0. \quad (16)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\bar{\chi}(\sigma)$ ($\sigma \geq 0$), связанную с искомым коэффициентом χ при помощи предельного равенства

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\chi}(\sigma) = \chi. \quad (17)$$

Применяя для решения уравнения (16) непрерывный метод решения операторных уравнений, приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно вспомогательной функции $\bar{\chi}(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\chi}}{d\sigma} = \lambda \left(\frac{1}{2} [u_0(x^* + \sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}t^*) + u_0(x^* - \sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}t^*)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}} \int_{x^* - \sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}t^*}^{x^* + \sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}t^*} v_0(\xi) d\xi - u(t^*, x^*) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициент λ принимает значения ± 1 , для того чтобы было выполнено условие отрицательности логарифмической нормы производной Гато правой части уравнения (18).

Аналогичный смысл коэффициент λ имеет и в остальных уравнениях, рассматриваемых в статье.

Присоединим к этому уравнению начальное условие

$$\bar{\gamma}(0) = \varrho, \quad (19)$$

где значение ϱ в соответствии с непрерывным операторным методом может быть произвольной константой.

Для приближенного решения задачи (18)–(19) воспользуемся методом Эйлера. Пусть θ – шаг, а L – число шагов метода Эйлера. Тогда приближенное решение задачи (18)–(19) реализуется следующей вычислительной схемой:

$$\bar{\chi}_{n+1} = \bar{\chi}_n + \theta \cdot \lambda \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[u_0(x^* + \sqrt{\bar{\chi}_n} t^*) + u_0(x^* - \sqrt{\bar{\chi}_n} t^*) \right] + \frac{1}{2\sqrt{\bar{\chi}_n}} \int_{x^* - \sqrt{\bar{\chi}_n} t^*}^{x^* + \sqrt{\bar{\chi}_n} t^*} v_0(\xi) d\xi - u(t^*, x^*) \right\}, \quad n = \overline{0, L-1}, \quad (20)$$

где $\bar{\chi}_n = \bar{\chi}(\sigma_n)$ и $\sigma_n = n\theta$.

В качестве результата вычислений по описанному алгоритму фиксируется значение $\bar{\chi}_L$, так что $\chi \approx \bar{\chi}_L$.

Приведем модельный пример, иллюстрирующий описанный метод.

Модельный пример 1. Поставим задачу о приближенном определении неизвестного коэффициента χ в задаче (1)–(2), если даны начальные условия

$$u_0(x) = \cos^2(x) + e^{-x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2 \cdot [\sin(2x) - e^{-x}]$$

и, кроме того, дополнительно известным является значение решения $u(t, x)$ в точке $(t^*, x^*) = (1, 0)$, равное $\cos^2(2) + e^{-2}$.

Замечание 1. Точное решение задачи (1)–(2) определяется функцией

$$u(t, x) = \cos^2(x - 2t) + e^{-(x+2t)}$$

при точном значении коэффициента $\chi = 4$.

Результаты решения задачи, полученные в ходе вычислительных экспериментов, представлены в табл. 1.

Таблица 1

№	$\bar{\chi}_0$	L	ϵ_u	$\chi_{\text{прибл}}$	ϵ_χ
1	3	50	0,029889	3,950674	0,049326
2	2	75	0,015200	3,975010	0,024990
3	1	100	0,006554	3,989270	0,010730
4	0,1	100	0,016682	3,972560	0,027440
5	0,01	100	0,019691	3,967583	0,032417
6	5	50	0,023922	4,039179	0,039179
7	6	75	0,009093	4,014963	0,014963
8	7	75	0,012720	4,020897	0,020897
9	8	75	0,015962	4,026195	0,026195
10	20	100	0,007693	4,012670	0,012670

В табл. 1 использованы следующие обозначения: № – порядковый номер численного эксперимента; $\bar{\chi}_0$ – начальное приближение для вычислительного процесса (20); L – число итераций вычислительного процесса (20);

$$\epsilon_u = \left| \frac{1}{2} \left[u_0(x^* + \bar{\chi}_L t^*) + u_0(x^* - \bar{\chi}_L t^*) \right] + \frac{1}{2\bar{\chi}_L} \int_{x^* - \bar{\chi}_L t^*}^{x^* + \bar{\chi}_L t^*} v_0(\xi) d\xi - u(t^*, x^*) \right|;$$

$\chi_{\text{прибл}}$ – найденное при помощи вышеописанного метода приближенное значение коэффициента χ ; $\epsilon_\chi = |\chi_{\text{прибл}} - \chi|$ – погрешность определения коэффициента χ .

Во всех численных экспериментах были зафиксированы значения шага метода Эйлера $\theta = 0,1$ и шага $h = 0,01$ квадратурной формулы трапеций приближенного вычисления интеграла в правой части формулы (19).

Теперь рассмотрим задачу о приближенном восстановлении неизвестного коэффициента χ в задаче Коши (3)–(4) для многомерного волнового уравнения в предположении о том, что дополнительно известным является значение $u(t^*, x^*, y^*)$, где (t^*, x^*, y^*) – фиксированная точка.

Общее решение задачи (3)–(4) определяется формулой [7]:

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\chi}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_{C_{\sqrt{\chi}t}} \frac{u_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\chi t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{\chi}} \iint_{C_{\sqrt{\chi}t}} \frac{v_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\chi t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}, \quad (21)$$

где $C_{\sqrt{\chi}t}$ – круг радиуса $\sqrt{\chi}t$ с центром в точке (x, y) .

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\bar{\chi}(\sigma)$, где $\sigma \in \mathbb{R}$, связанную со значением коэффициента χ формулой (17). Потребуем, чтобы функция $\bar{\chi}(\sigma)$ удовлетворяла следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\sigma} = \lambda \left\{ \frac{1}{2\pi\sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint_{C_{\sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}t}} \frac{u_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\bar{\chi}(\sigma)t^2 - (\xi - x^*)^2 - (\eta - y^*)^2}} \right) \right|_{t=t^*} + \frac{1}{2\pi\sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}} \iint_{C_{\sqrt{\bar{\chi}(\sigma)}t^*}} \frac{v_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\bar{\chi}(\sigma)(t^*)^2 - (\xi - x^*)^2 - (\eta - y^*)^2}} - u(t^*, x^*, y^*) \right\}. \quad (22)$$

Присоединим к этому уравнению начальное условие (19), где значение ϱ фиксируется произвольным образом. Для приближенного решения построенной начальной задачи воспользуемся методом Эйлера. Пусть θ – шаг, а L – число итераций метода Эйлера; тогда имеем следующую вычислительную схему:

$$\bar{\chi}_{n+1} = \bar{\chi}_n + \theta \cdot \lambda \cdot \left\{ \left(\frac{\partial I(u_0; t, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)}{\partial t} \right) \right\}_{t=t^*} + \\ + I(v_0; t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n) - u(t^*, x^*, y^*) \Bigg\}, \quad (23)$$

где $n = \overline{0, L-1}$,

$$I(f; t, x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\chi(\sigma)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\chi(\sigma)t}} \frac{\rho \cdot f(x + \rho \cos(\varphi), y + \rho \sin(\varphi))}{\sqrt{\chi(\sigma)t^2 - \rho^2}} d\rho,$$

$\bar{\chi}_n = \chi(\sigma_n)$, $\sigma_n = n\theta$. Интегралы в формуле (23) получены из соответствующих интегралов в правой части уравнения (22) в результате перехода к полярной системе координат.

Замечание 2. При численных расчетах по формуле (23) имеющиеся в ней интегралы $I(u_0; t, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)$ и $I(v_0; t, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)$ вычисляются по кубатурному аналогу квадратурной формулы трапеций, а производная $\partial I(u_0; t, x^*, y^*; \bar{\chi}_n) / \partial t$ аппроксимируется разностной формулой

$$\left(\frac{\partial I(u_0; t, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)}{\partial t} \right) \Bigg|_{t=t^*} \approx \frac{I(u_0; t^* + \tau, x^*, y^*; \bar{\chi}_n) - I(u_0; t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)}{\tau}, \quad (24)$$

где τ – достаточно малый шаг, являющийся параметром метода.

Приведем модельный пример, иллюстрирующий эффективность предложенного метода.

Модельный пример 2. Пусть требуется осуществить приближенное восстановление коэффициента χ в задаче (3)–(4), если известны начальные значения

$$u_0(x, y) = \exp(y) \left(x^2 - y/2 \right), \quad v_0(x, y) = 2 \exp(y) \left(x^2 - y/2 \right) + \exp(y),$$

и, кроме того, дополнительно известно значение $u(1/2, 0, 0) = e/2$ решения задачи (3)–(4) в точке $(1/2, 0, 0)$.

Замечание 3. Точное значение коэффициента $\chi = 4$ при точном решении задачи (3)–(4):

$$u(t, x, y) = \exp(2t + y) \left(x^2 + t - y/2 \right).$$

При реализации алгоритма были зафиксированы следующие параметры:

- шаг кубатурной формулы по переменной φ : $h_\varphi = 0,1$;
- шаг кубатурной формулы по переменной ρ : $h_\rho = 0,001$;
- шаг метода Эйлера $\theta = 0,1$;
- шаг по переменной t в формуле $\tau = 0,01$.

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 2. Через ε_u обозначена величина

$$\varepsilon_u = \left| \left(\frac{\partial I(u_0; t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)}{\partial t} \right) \right|_{t=t^*} + I(v_0; t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n) - u(t^*, x^*, y^*),$$

остальные обозначения совпадают с обозначениями табл. 1.

Таблица 2

№	$\bar{\chi}_0$	L	ε_u	$\chi_{\text{прибл}}$	ε_χ
1	3	100	0,021876	3,948517	0,051483
2	2	120	0,026987	3,927521	0,072479
3	1	150	0,019802	3,957041	0,042959
4	1	200	0,005758	4,014614	0,014614
5	0,1	150	0,026394	3,929931	0,070069
6	5	150	0,005525	4,060701	0,060701
7	6	180	0,005195	4,059350	0,059350
8	7	200	0,004636	4,057056	0,057056
9	8	250	0,001729	4,045209	0,045209
10	20	300	0,001464	4,044122	0,044122

Замечание 4. В связи со свойствами оператора, определяемого правой частью формулы (21) для обеспечения сходимости вычислительного процесса (23), потребовалось принять $\lambda = -1$.

3. Восстановление неизвестного коэффициента в граничной задаче для волнового уравнения

Применим непрерывный операторный метод к решению задачи восстановления постоянного коэффициента χ в граничной задаче (5)–(7) для одномерного волнового уравнения. Поскольку применение известной [7] обобщенной формулы решения задачи (5)–(7), реализующей представление решения $u(t, x)$ через специального вида ряд, вызывает определенные трудности при реализации непрерывного операторного метода, то необходимо выбрать альтернативный аппарат. В качестве такового далее предлагается использовать аппарат разностных схем.

Обозначим через $S(t^*, x^*; \tilde{\chi})$ функционал, возвращающий решение $u(t, x)$ задачи (5)–(7) в точке (t^*, x^*) при $\chi = \tilde{\chi}$, где $\tilde{\chi}$ – приближенное

значение χ на рассматриваемом шаге итерационного процесса.. Имеет место формула

$$S(t^*, x^*; \chi) - u(t^*, x^*) = 0. \quad (25)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\bar{\chi}(\sigma)$ ($\sigma \geq 0$), связанную со значением коэффициента χ при помощи формулы (17). На основании (25) составим и решим дифференциальное уравнение относительно функции $\bar{\chi}(\sigma)$:

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\sigma} = \lambda \left[S(t^*, x^*; \bar{\chi}) - u(t^*, x^*) \right]. \quad (26)$$

Для приближенного решения уравнения воспользуемся методом Эйлера. Пусть θ – шаг метода Эйлера, а L – число его итераций. Тогда уравнение (26) решается с помощью следующей вычислительной схемы:

$$\bar{\chi}_{n+1} = \bar{\chi}_n + \theta \cdot \lambda \cdot \left\{ S(t^*, x^*; \bar{\chi}_n) - u(t^*, x^*) \right\}, \quad n = \overline{0, L-1}, \quad (27)$$

где $\bar{\chi}_n = \bar{\chi}(\sigma_n)$.

Результатом вычислительного процесса (27) является значение $\bar{\chi}_L$, так что $\chi \approx \bar{\chi}_L$.

Наконец, проведем построение функционала $S(t^*, x^*; \bar{\chi}_n)$, для чего воспользуемся явной разностной схемой решения задачи (5)–(7) при $\chi = \bar{\chi}_n$:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\bar{\chi}_n \tau^2}{h^2} (u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}), \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (28)$$

$$u_{0,j} = u_0(x_j), \quad j = \overline{1, N}, \quad (29)$$

$$u_{i,0} = \varphi^{(1)}(t_i), \quad u_{i,N} = \varphi^{(2)}(t_i), \quad i = \overline{1, M}, \quad (30)$$

где $u_{i,j} = u(t_i, x_j)$, $t_i = i\tau$, $x_j = jh$, а $\tau = T/M$ и $h = \ell/N$ – шаги разностной сетки по переменным τ и h соответственно.

Замечание 5. Для того чтобы счет по разностной схеме (28)–(30) был устойчивым, должно выполняться условие $\chi \tau^2 / h^2 < 1$. Выполнения этого условия при различных значениях $\bar{\chi}_n$ можно добиться, если зафиксировать соотношение τ^2 / h^2 достаточно малым.

Предположим, что существуют такие значения индексов $i = i^*$, $j = j^*$, что $i^* \tau = t^*$, $j^* h = x^*$. Тогда оператор $S(t^*, x^*; \bar{\chi}_n)$ возвращает значение u_{i^*, j^*} из множества значений $u_{i,j}$, полученное в результате реализации разностной схемы (28)–(30) при фиксированном значении $\bar{\chi}_n$ на текущей итерации процесса (27).

Замечание 6. Данное условие упрощает построение и реализацию метода, но, вообще говоря, не является обязательным. В самом деле, если это условие не выполнено, то функционал $S(t^*, x^*; \bar{\chi}_n)$ должен быть построен таким образом, чтобы возвращать значение $u(t^*, x^*)$ как значение сплайна в точке (t^*, x^*) , построенного на найденном по разностной схеме (28)–(30) множестве значений $u_{i,j}$.

Пусть значение $\bar{\gamma}_n$ задано предыдущей итерацией метода либо начальным условием ($n = 0$). Тогда метод приближенного восстановления коэффициента χ в задаче (5)–(7) определяется следующей последовательностью шагов:

1. Для зафиксированного значения χ_n проводятся расчеты по разностной схеме (28)–(30).

2. Фиксируется значение функционала $S(t^*, x^*; \bar{\chi}_n)$ как значение в одном из узлов упомянутой разностной схемы либо посредством использования сплайна.

3. По формуле (27) вычисляется следующее значение $\bar{\gamma}_n$, после чего выполняется возврат к шагу 1.

4. После L -кратного повторения шагов 1–3 фиксируется $\chi \approx \bar{\chi}_L$.

Приведем модельный пример.

Модельный пример 3. При помощи вышеописанного метода найдем приближенное значение коэффициента в граничной задаче (5)–(7), если известными являются следующие исходные данные:

$$u_0(x) = \cos^2(x) + e^{-x}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 2 \cdot [\sin(2x) - e^{-x}],$$

$$\varphi^{(1)}(x) = \cos^2(2t) + \exp(-2t), \quad \varphi^{(2)}(x) = \cos^2(1-2t) + \exp(-1-2t).$$

Зафиксировано $\ell = 1$. Требуется приближенно определить значение коэффициента χ , если дополнительно известным является значение $u(1/2, 1/2) = \cos^2(1/2) + e^{-3/2}$.

Замечание 7. Точное значение коэффициента и точное решение соответствующей описанным выше исходным данным задачи (5)–(7) приведены в замечании 1.

Во всех численных экспериментах были зафиксированы значения шага метода Эйлера $\theta = 0,1$ и шагов $\tau = 0,1$ и $h = 0,01$ разностного метода (28)–(30).

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 3. Через ε_u обозначена величина

$$\varepsilon_u = \left| S(t^*, x^*; \bar{\chi}_n) - u(t^*, x^*) \right|,$$

остальные обозначения совпадают с обозначениями табл. 2.

Таблица 3

№	$\bar{\chi}_0$	L	ϵ_u	$\chi_{\text{прибл}}$	ϵ_χ
1	3	300	0,006043	3,944504	0,055496
2	2	370	0,005704	3,948540	0,051460
3	1	400	0,005771	3,947749	0,0522511
4	0,1	500	0,002907	3,982146	0,017854
5	5	450	0,002447	4,047742	0,047742
6	6	500	0,004124	4,068643	0,068643
7	7	600	0,003593	4,062008	0,062008
8	8	800	0,001287	4,033382	0,033382
9	9	1000	0,000451	4,023085	0,023085
10	20	4500	0,000046	4,018108	0,018108

Вышеописанный метод восстановления значения постоянного коэффициента χ с минимальными изменениями переносится на многомерный случай.

В самом деле, поставим задачу приближенного определения коэффициента χ в задаче (8)–(10), если дополнительно известным является значение $u(t^*, x^*, y^*)$ решения этой задачи в некоторой фиксированной точке (t^*, x^*, y^*) .

Пусть $S(t^*, x^*, y^*; \tilde{\chi})$ – функционал, возвращающий решение $u(t, x)$ задачи (5)–(7) в точке (t^*, x^*, y^*) , если χ зафиксировано своим приближенным значением $\tilde{\chi}$. Справедлива формула

$$S(t^*, x^*, y^*; \chi) - u(t^*, x^*, y^*) = 0. \quad (31)$$

Пусть вспомогательная функция $\bar{\chi}(\sigma)$ ($\sigma \geq 0$) такова, что для нее выполняется предельное равенство (17). Используя (31), построим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\sigma} = \lambda \left[S(t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}) - u(t^*, x^*, y^*) \right]. \quad (32)$$

Для того чтобы найти решение уравнения (32), единственность которого обеспечивается фиксированием значения $\bar{\chi}_0$ (которое в соответствии с непрерывным операторным методом может задаваться произвольным образом), воспользуемся методом Эйлера. Пусть L – число итераций и θ – шаг метода Эйлера. Уравнение (32) приближенно решается при помощи вычислительного процесса

$$\bar{\chi}_{n+1} = \bar{\chi}_n + \theta \cdot \lambda \cdot \left\{ S(t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n) - u(t^*, x^*, y^*) \right\}, \quad n = \overline{0, L-1}, \quad (33)$$

где $\bar{\chi}_n = \bar{\chi}(\sigma_n)$.

В качестве результата реализации процесса (33) фиксируется значение $\bar{\chi}_L$, аппроксимирующее значение коэффициента χ .

Для того чтобы построить функционал $S(t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)$, воспользуемся явной разностной схемой решения задачи (5)–(7) при $\chi = \bar{\chi}_n$:

$$u_{i+1,j,k} = u_{i,j,k} + \frac{\bar{\chi}_n \tau^2}{h^2} (u_{i,j-1,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j,k-1} + u_{i,j,k+1} - 4u_{i,j,k}), \quad i = \overline{0, M}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (34)$$

$$u_{0,j,k} = u_0(x_j, y_k), \quad j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (35)$$

$$u_{i,j,0} = \varphi^{(1)}(t_i, x_j), \quad u_{i,j,N} = \varphi^{(2)}(t_i, x_j), \quad i = \overline{1, M}, \quad (36)$$

$$u_{i,0,k} = \varphi^{(3)}(t_i, y_k), \quad u_{i,N,k} = \varphi^{(4)}(t_i, y_k) \quad i = \overline{1, M}, \quad (37)$$

где $u_{i,j,k} = u(t_i, x_j, y_k)$, $t_i = i\tau$, $x_j = jh$, $y_k = kh$, а $\tau = T/M$ и $h = \ell/N$ – шаги разностной сетки по переменным τ и h соответственно.

Отметим, что эта схема, как и схема (28)–(30), условно устойчива: для ее устойчивости для шагов τ и h при всех $\bar{\chi}_n$ должно выполняться соотно-

шение $\frac{\bar{\chi}_n \tau^2}{h^2} < 1$. Тем самым $S(t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)$ формально конструируется как

функционал, ставящий в соответствие всякому набору параметров $(t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)$ значение $u(t^*, x^*, y^*)$, полученное в результате выполнения счета по разностной схеме (34)–(37), либо (в случае, если точка (t^*, x^*, y^*) не совпадает ни с одним из узлов используемой для построения схемы сетки узлов) в результате вычисления значения сплайна, который строится на множестве значений $u_{i,j,k}$, полученных по схеме (34)–(37).

Таким образом, метод восстановления коэффициента χ задачи (8)–(10) определяется следующей последовательностью шагов:

1. Для зафиксированного начальным условием ($n = 0$) или предыдущей итерацией алгоритма значения $\bar{\gamma}_n$ выполняем счет по разностной схеме (34)–(37).

2. Фиксируем в качестве значения функционала $S(t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n)$ либо значение в одном из узлов разностной схемы, либо значение сплайна в точке (t^*, x^*, y^*) . Сплайн вычисляется по значениям функции u в узлах разностной схемы.

3. По формуле (33) вычисляем следующее значение $\bar{\gamma}_n$ и переходим к шагу 1.

4. Повторив L раз шаги 1–3, принимаем $\chi \approx \bar{\chi}_L$.

Приведем модельный пример, иллюстрирующий эффективность предложенного метода.

Модельный пример 4. Пусть требуется осуществить приближенное восстановление коэффициента χ в задаче (8)–(10), если известными являются функции

$$u_0(x, y) = e^y \left(x^2 - \frac{y}{2} \right), \quad v_0(x, y) = 2e^y \left(x^2 - \frac{y}{2} \right) + e^y, \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

$$\varphi^{(1)}(t, x) = e^{2t} \left(x^2 + t \right), \quad \varphi^{(2)}(t, x) = e^{2t+1} \left(x^2 + t - \frac{1}{2} \right),$$

$$\varphi^{(3)}(t, y) = e^{2t+y} \left(t - \frac{y}{2} \right), \quad \varphi^{(4)}(t, y) = e^{2t+y} \left(1 + t - \frac{y}{2} \right)$$

и, кроме того, дополнительным известным является значение $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{e^{3/2}}{2}$ решения задачи (8)–(10).

Замечание 8. Точное значение коэффициента $\chi = 4$ при точном решении задачи (3)–(4):

$$u(t, x, y) = e^{2t+y} \left(x^2 + t - \frac{y}{2} \right).$$

При расчетах были зафиксированы следующие параметры алгоритма:

- шаг разностной схемы по переменной x : $h = 0,01$;
- шаг кубатурной формулы по переменной t : $\tau = 0,001$;
- шаг метода Эйлера $\theta = 0,1$.

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 4. Через ϵ_u обозначена величина

$$\epsilon_u = \left| S\left(t^*, x^*, y^*; \bar{\chi}_n\right) - u\left(t^*, x^*, y^*\right) \right|,$$

остальные обозначения совпадают с обозначениями предыдущих таблиц.

Таблица 4

№	$\bar{\chi}_0$	L	ϵ_u	$\chi_{\text{прибл}}$	ϵ_χ
1	3	250	0,003471	3,944214	0,055786
2	2	300	0,002677	3,950154	0,049846
3	1	350	0,001615	3,958134	0,041866
4	0,1	400	0,000829	3,964064	0,035931
5	5	200	0,012560	4,068583	0,068583
6	6	300	0,009683	4,046661	0,045551
7	7	350	0,011353	4,058877	0,058877
8	8	400	0,012284	4,066358	0,066358
9	9	450	0,012754	4,070142	0,070142
10	9	500	0,006768	4,022536	0,022536
11	20	1000	0,000722	3,975828	0,024172

Замечание 9. Для обеспечения сходимости вычислительного процесса (33) потребовалось принять $\lambda = -1$.

Заключение

В результате проведенного исследования был предложен подход к решению задачи приближенного восстановления постоянного коэффициента в начальной и граничной задачах для волнового уравнения. Рассмотрен как одно-, так и двухмерный случаи. Построенные численные алгоритмы оказались достаточно простыми, а решение модельных примеров показало их высокую точность и эффективность. Представляет значительный теоретический и практический интерес распространение предложенного подхода на другие классы коэффициентных задач для различных типов уравнений математической физики.

Библиографический список

1. **Романов, В. Г.** Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. – Москва : Наука, 1984. – 264 с.
2. **Hasanov Hasanoglu, A.** Introduction to inverse problems for differential equations / A. Hasanov Hasanoglu, V. G. Romanov. – Cham : Springer International Publishing AG, 2017. – 261 p.
3. **Лаврентьев, М. М.** Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов. – Новосибирск : Наука, Новосибирское отделение, 1969. – 68 с.
4. **Кабанихин, С. И.** Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
5. **Бойков, И. В.** Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. – Т. 21, № 2. – С. 149–163.
6. **Бойков, И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
7. **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

References

1. Romanov V. G. *Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1984, 264 p. [In Russian]
2. Hasanov Hasanoglu A., Romanov V. G. *Introduction to inverse problems for differential equations*. Cham: Springer International Publishing AG, 2017, 261 p.
3. Lavrent'ev M. M., Vasil'ev V. G., Romanov V. G. *Mnogomernye obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy* [Multidimensional inverse problems for differential equations]. Novosibirsk: Nauka, Novosibirskoe otделение, 1969, 68 p. [In Russian]
4. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Reverse and incorrect problems]. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009, 457 p. [In Russian]
5. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Journal of the Middle Volga Mathematical Society]. 2019, vol. 21, no. 2, pp. 149–163. [In Russian]
6. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314. [In Russian]

7. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow: FIZMATLIT, 2001, 576 p. [In Russian]
-

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the sub-
department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40, Krasnaya street, Penza, Russia)

Рязанцев Владимир Андреевич

кандидат технических наук, доцент,
кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Ryazantsev Vladimir Andreevich

Candidate of engineering sciences,
associate professor, sub-department
of higher and applied mathematics,
Penza State University
(40, Krasnaya street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Бойков, И. В. О численном решении коэффициентной обратной задачи для гиперболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 3 (51). – С. 47–62. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-4.